

Title	圓體ヲ表現スル行列 I
Author(s)	武隈, 良一
Citation	全国紙上数学談話会. 214 p.147-p.151
Issue Date	1941-05-11
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74850
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

920. 圓體ヲ表現スル行列 I

武隈 良一 (小樽)

円體ヲ行列ニヨツテ表現スルコトハ既ニ試ミラレテ居ルト思ヒマスガソレニ對スル文献ヲ知ラスノデ (アリマスレバ御教示下サイ) 以下ノ如ク考ヘテ見マシタ。不完全ナ点ニ對スル御叱正ト之レニ關スル御蘊蓄ヲ御洩ラシ下サルコトヲ御願ヒ致シマス。

今 n ヲ奇素數トシ

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = 0$$

1 根ヲ $\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$

Γ ヲ有理數體トスルトキ $\Gamma(\alpha)$ ヲ表現スルコトヲ考ヘテ行キマス。即チ奇素數円分體ヲ考究ノ範圍ニオキマス。

先ツ n 次ノ n 次平方行列

$$\xi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots,$$

$$\xi_{n-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ヲ底トスル行列

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

ノ集合ヲ \mathcal{M}_n ヲ考ヘ、 A ヲ簡單ノタメ (a_i) ト畧記シマス。

サテ $\Gamma(\varphi) =$ 属スル任意ノ数ハ

$$a_1 + a_2 \varphi + \cdots + a_n \varphi^{n-1} \quad (A)$$

(茲ニ a_i ハ有理數)

ト表ハサレ $\mathcal{M}_n =$ 属スル任意ノ行列ハ

$$a_1 \xi_0 + a_2 \xi_1 + \cdots + a_n \xi_{n-1} \quad (B)$$

ト表ハサレルノデ (A) ヲ (B) ヲ用ヒテ表現シテ見ヤリトスルガ小論ノ終端デアリマス。

$A = (a_i) =$ 於ケル元 a_i ヲスベテ有理數トスルトキ
明ヲカニ $(A) \longrightarrow (B)$

ナル對應ハ考ヘラレマスガ、コノ逆ハ直チニ行キマセシ。ソ
コデ逆ノ對應ヲツケルタメニ $\mathcal{M}_n =$ 相等ノ定義ヲ下シソレニ

ヨリ相等シイモノヲ一類ノ集團ニシテオキ、 M ニ於ケル類
 $= \Gamma(\varphi)$ ノ一數ヲ對應サセルコトニシマス。

定義1. (M_n ニ於ケル相等)

ニツノ行列 $A = (a_i), B = (b_i) =$ 於テ

$$a_i - a_j = b_i - b_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

ナルトキ而テコノ時ニ限リ $A=B$ トス。

ex. $M_3 =$ 於テ

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 8 & 1 & 4 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 10 \\ 10 & 3 & 6 \\ 6 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

定理1. 相等ノ定義ハ反射律、對稱律、推移律ヲ満足
 ス。

証明 ----- 略

上ノ相等ノ定義ニヨリ M_n ニ於ケル相等シキモノヲ一類ニ
 集メ、斯ル類ノ集合ヲ M_n トシマス。

定理2. $M_n \ni A$ トスルトキ

$$A + X = A$$

ヲ満足スル X ハ M_n ノ中ニ必ず唯一個アリ。

証明 (定義1ニヨル)

定義2. 定理2ニ於ケル X ヲ M_n ニ於ケル0トイフ。コ
 ノ定義ニヨレバ M_n ニ於ケル0ハ勿論零行列ヲ含ンテ居リマ
 スが其他ニハ一般ニ $X = (x_i) =$ 於テ

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

ナル形ヲシテオリマス。

ソレ故 $A = (a_i)$ ノスベテノ元ニ同ノ数ヲ加減シ
 テモ A ノ属スル類ニハ変リハアリマセンノデ、類ヲ代表ス
 ル行列ノスベテノ元ガ正ノ有理數(又ハ0)トシテ一般性
 ヲ失ヒマセン。今後 $a_i \geq 0$ トシマス。(即チ一ツデモ負
 ニナルモノガアッタラ適當ノ正數ヲ加ヘテ正ニ直スコト
 ニシマス)

以上ニヨリ $\Gamma(\mathcal{C})$ ノ一數ト M_n ノ一類トヲ一對ニ對
 應サセルコトガ出来マス。

ex. 三次円体ニ於テ

$$2 + \zeta - 3\zeta^2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore 2 + \zeta - 3\zeta^2 &= 2 + \zeta - 3\zeta^2 + 3(1 + \zeta + \zeta^2) \\ &= 5 + 4\zeta \end{aligned}$$

コノ例ニ於テ見ラルニ如ク a_i ノ中一ツハ必ず0ニスルコ
 トが出来ルノデ —— $1 + \zeta + \zeta^2 + \dots + \zeta^{n-1} = 0$ ヲ用ヒ
 マスカラ —— 今後ハ a_{n-1} 式ガ0トシテモ一般性ヲ失
 ヒマセン。

定理3. $A \neq 0$ ナラバ $|A| \neq 0$ ナリ。

証明. $|A|$ ハ循環行列式ナル故。

コレニヨリ次ノ定理ガ成立シマス。

定理4. M_n ハ Körper ヲナス。

証明. 長クナルノデ省ク。

M_n ニ於ケル零ハ既ニ説明シマシタガ *Einheit* 即チ $A \cdot X = A$

ナル \times ハ ξ_0 デアリマス。

定義 3.

$$(a_i) = a_1 \xi_0 + a_2 \xi_1 + \dots + a_n \xi_{n-1}$$

ト表ハシタトキ

ξ_0 ヲ主單位

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ ヲ副單位

トイヒ兩者ヲ総稱シタトキ單位トイフ。

定理 5. 單位ニ関シテハ次ノ乗積表が成立ス。

	ξ_0	ξ_1, \dots, ξ_{n-1}
ξ_0	ξ_0	ξ_1, \dots, ξ_{n-1}
ξ_1	ξ_1	ξ_2, \dots, ξ_0
\vdots		
ξ_{n-1}	ξ_{n-1}	ξ_0, \dots, ξ_{n-2}

証明 略ス。

以上ヲ以テ序論ヲ終ヘ續論ハ次ノ機會ニ表シタイト思ヒマス。コノ小論ノ究極ノ目的ハ Fermat 方程式

$$X^n + Y^n + Z^n = 0$$

ガ $M_n =$ 於ケル行列ニヨル解ヲ有セヌトイフコトヲ証サントスルニマリマス。(續ク)